

**Заключение диссертационного совета ФПМИ.1.1.1.003**  
от 29 декабря 2023 года  
**о присуждении Арутюнову Андроник Арамовичу (гражданство РФ)**  
**учёной степени доктора физико-математических наук**

Диссертация «О дифференцированиях в групповых алгебрах и других алгебраических структурах» принята к защите 26 сентября 2023 решением Экспертного совета по физико-математическим наукам Аттестационной комиссии МФТИ, протокол № ФМ-2023/16.

Соискатель: Арутюнов Андроник Арамович, 1988 года рождения. В 2010 г. Арутюнов А.А. окончил механико-математический факультет федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова специальности «математика» (диплом 01dw11-015). В 2013 г. защитил кандидатскую диссертацию по специальности 01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. Тема диссертации: «Редукция псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к псевдодифференциальным операторам на компактном многообразии удвоенной размерности» под научным руководством проф. А.С. Мищенко и академика РАН Д.В. Аносова (Диплом ДКН №200864).

С 2022 года основное место работы Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук.

Диссертация прошла апробацию в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук.

В качестве ведущей организации выбран Институт математики с вычислительным центром - обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, что обосновано их согласием и компетентностью, подтвержденной публикациями, которые соответствуют тематике диссертации, а также способностью определить научную и практическую ценность работы.

**Ведущая организация** Институт математики с вычислительным центром – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук в своем положительном заключении, подписанном и.о. директора ИМВЦ УФИЦ РАН доктором физико-математических наук Ильдаром Хамитовичем Мусиным и доктором физико-математических наук, доцентом Юрием Аркадьевичем Кордюковым, утвержденном на расширенном

научном семинаре отдела теории функций и функционального анализа ИМВЦ УФИЦ РАН « 1 » ноября 2023 г., указала следующее:

*Понятие дифференцирования является одним из фундаментальных понятий математики, являющимся алгебраическим обобщением классического понятия производной в математическом анализе, в основе которого лежит правило Лейбница. Его геометрическим аналогом является понятие векторного поля. Дифференцирования возникают и играют важную роль в различных областях математики. Они позволяют дать алгебраические определения аналогов дифференциальных и псевдодифференциальных операторов в различных ситуациях, являются генераторами однопараметрических групп преобразований конечномерных и бесконечномерных векторных пространств и гладких многообразий. Этим, в частности, объясняется фундаментальная роль, которую дифференцирования играют в некоммутативной геометрии. Поэтому исследование дифференцирований на различных классах ассоциативных и операторных алгебр является актуальной задачей современной математики.*

*Настоящая диссертация посвящена исследованию дифференцирований на групповой алгебре дискретной группы. Основная цель работы состоит в изучении и описании дифференцирований и некоторых их обобщений, изучении их свойств и анализе их структуры. Здесь автор применяет и развивает предложенный им совместно с А.С. Мищенко и А.И. Штерном метод, основанный на описании дифференцирований на групповых алгебрах в терминах характеров на группоиде присоединенного действия.*

*Результаты представлены в диссертации следующим образом. Диссертация состоит из 12 глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 278 страниц.*

*Первая глава представляет собой введение. В ней обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели и задачи и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.*

*Во второй главе дано описание основных положений разрабатываемого автором метода исследования дифференцирований на групповой алгебре  $\mathbb{C}[G]$  конечнопорожденной дискретной группы  $G$ . Прежде всего, даны определения группоиды присоединенного действия группы  $G$  и характера на группоиде. В основе метода лежит связь между дифференцированиями на алгебре  $\mathbb{C}[G]$  и локально финитными характерами на группоиде присоединенного действия. Она позволяет ввести понятия квазивнутренних и квазивнешних дифференцирований алгебры  $\mathbb{C}[G]$ . В качестве важного примера квазивнешних дифференцирований приведены так называемые центральные дифференцирования.*

В третьей главе дано описание алгебры внешних дифференцирований на групповых алгебрах нильпотентных групп ранга 2.

Четвертая глава посвящена исследованию связи между дифференцированиями групповой алгебры и концами группы. Автор строит некоторый граф  $sk(G)$ , называемый диаграммой сопряженности группы  $G$ . Установлена формула для размерности факторпространства квазивнутренних дифференцирований по внутренним дифференцированиям в терминах числа концов этого графа. Дано описание квазивнешних дифференцирований в терминах подходящих пространств аддитивных характеров на централизаторах элементов группы. Установлены критерии тривиальности алгебр внешних и квазивнешних дифференцирований.

В пятой главе доказано, что алгебра квазивнешних дифференцирований канонически изоморфна алгебре 2-характеров, удовлетворяющих некоторому аналогу условия локальной финитности, на 2-группоиде, обобщающем группоид присоединенного действия.

Шестая глава посвящена дифференцированиям на полугрупповых алгебрах. Роль группоида присоединенного действия в данном случае играет некоторая категория. Автор вводит понятие квазивнутреннего дифференцирования в терминах подходящих характеров на этой категории. Доказано, что пространство квазивнутренних дифференцирований является идеалом в алгебре дифференцирований полугрупповой алгебры  $\mathbb{C}[S]$  полугруппы  $S$ . Если  $S$  удовлетворяет условиям Мальцева, то она может быть вложена в некоторую группу  $G$  как подполугруппа. Доказано, что алгебра дифференцирований полугрупповой алгебры  $\mathbb{C}[S]$  вкладывается в алгебру дифференцирований соответствующей групповой алгебры  $\mathbb{C}[G]$ .

Седьмая глава посвящена дифференцированиям на групповых алгебрах с коэффициентами в коммутативных кольцах для групп с конечными классами сопряженности — так называемых FC-групп. Пусть  $G$  — конечно порожденная FC-группа,  $A$  — унитарное коммутативное кольцо. Дано описание внешних дифференцирований на групповой алгебре  $A[G]$  в терминах аддитивных гомоморфизмов из централизаторов элементов группы в кольцо  $A$ . Более точное описание дано в случае, когда  $G$  является конечной группой. Доказан критерий тривиальности алгебры внешних дифференцирований в случае, когда  $G$  является конечной группой, а кольцо  $A$  конечно.

Восьмая глава посвящена обобщениям приведенных выше конструкций на случай, когда вместо присоединенного действия рассматривается произвольное левое действие  $\lambda$  группы  $G$  на себе. Автор определяет группоид действия,

характеры на нем и граф  $sk(G, \lambda)$ , являющийся обобщением диаграммы сопряженности, введенной в четвертой главе. Установлена формула для числа концов графа  $sk(G, \lambda)$  в терминах размерностей пространств локально финитных характеров на группоиде действия, обобщающая формулу, полученную в четвертой главе. При помощи характеров на группоиде действия автор строит семейства операторов на групповой алгебре  $\mathbb{C}[G]$ , обобщающие операторы классического дифференцирования. Дано необходимое и достаточное условие того, что каждая компонента связности графа  $sk(G, \lambda)$  имеет не более одного конца, в терминах данных семейств операторов на  $\mathbb{C}[G]$ . В случае, когда  $\lambda$  — действие группы  $G$  на себе левыми сдвигами, граф  $sk(G, \lambda)$  совпадает с графом Кэли группы  $G$ , а соответствующие операторы на групповой алгебре есть так называемые дифференцирования Фокса. Применение полученных в данной главе результатов позволяет дать описание всех дифференцирований Фокса для произвольной конечно порожденной группы.

В девятой главе конструкции, предложенные в первой главе, применяются к еще одному обобщению понятия дифференцирования, а именно к так называемым  $(\sigma, \tau)$ -дифференцированиям. Дано определение соответствующего группоида, установлена связь между  $(\sigma, \tau)$ -дифференцированиями алгебры  $\mathbb{C}[G]$  и локально финитными характерами на группоиде, введено понятие квазивнутреннего  $(\sigma, \tau)$ -дифференцирования. Дано описание  $(\sigma, \tau)$ -дифференцирований для  $(\sigma, \tau)$ -нильпотентных групп и для групп с конечными  $(\sigma, \tau)$ -классами сопряженности в терминах квазивнутренних дифференцирований и подходящих пространств групповых характеров на  $(\sigma, \tau)$ -централизаторах элементов группы. Более того, показано, что в последнем случае любое квазивнутреннее дифференцирование является внутренним.

В десятой главе автор рассматривает дифференцирования на алгебре  $\mathbb{C}[G]$  со значениями в бимодулях над  $\mathbb{C}[G]$ , являющихся ее пополнениями по некоторой норме  $\|\cdot\|$ . Как и выше, каждому такому дифференцированию ставится в соответствие характер на группоиде присоединенного действия, что позволяет, в частности, ввести понятие квазивнутреннего дифференцирования. Главным результатом главы является следующее утверждение. Если норма  $\|\cdot\|$  подчинена супремум-норме на  $\mathbb{C}[G]$ , то все дифференцирования на алгебре  $\mathbb{C}[G]$  со значениями в бимодулях квазивнутренние. Автор также приводит серию примеров норм  $\|\cdot\|$  на  $\mathbb{C}[G]$ , для которых существуют нетривиальные квазивнешние дифференцирования (в частности, центральные).

Одиннадцатая глава посвящена построению обобщенной алгебры псевдодифференциальных операторов над алгеброй  $\mathbb{C}[G]$ , порождаемой заданным набором центральных дифференцирований.

Двенадцатая глава посвящена исследованию дифференцирований на алгебре  $\mathbb{C}[G]$ , рассматриваемой как алгебра Ли относительно операции коммутатора (автор называет такие дифференцирования производными). Установлена связь между производными и комплекснозначными локально финитными функциями на группоиде присоединенного действия, удовлетворяющими некоторым алгебраическим соотношениям.

Диссертация написана грамотно и аккуратно оформлена. Изложение материала четкое. Доказательства основных результатов корректны, приведены полностью и подробно.

Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Они своевременно опубликованы надлежащим образом.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и заключений, полученных в диссертации, подтверждается строгостью приведенных математических доказательств и корректным использованием современных методов высшей алгебры, метрической геометрии, функционального анализа. Достоверность научных результатов диссертации также подтверждается публикацией результатов работы в ведущих российских и международных математических журналах и их апробацией на международных и всероссийских конференциях и научных семинарах.

Работа носит теоретический характер. Научная значимость результатов, полученных в диссертации, заключается в развитии теории дифференцирований на ассоциативных и операторных алгебрах. Полученные результаты могут быть использованы специалистами по алгебраической топологии, теории операторных алгебр, некоммутативной геометрии, анализу на многообразиях.

Результаты диссертации опубликованы в 22 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых реферативной базой данных Scopus.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Из недостатков следует отметить, что диссертация содержит достаточно большое число мелких опечаток и грамматических ошибок. Местами автор допускает небрежности в формулировках, например:

- Стр. 72, теорема 2.6.1: Вместо  $\mathbb{C}[G]$  следует писать  $Der(\mathbb{C}[G])$ .
- Стр. 87, 2-й абзац: Определение вершинно-транзитивного графа сформулировано неточно.
- Стр. 137, раздел 6.1.6: Хорошо было бы привести пример полугруппы  $S$ .

- Стр. 143, следствие 7.1.1.1: Вместо (5.2.2) следует написать (7.1.3).
- Стр. 157, предложение 7.3.2: Следует добавить в конце формулировки: «и для некоторых классов сопряженности  $[u_i]$ ».
- Стр. 218, теорема 10.0.1: Точнее сказать «все дифференцирования на  $\mathbb{C}[G]$  со значениями в бимодуле  $A$ ».
- Стр. 220, 3-й абзац: Для элементов бимодуля  $A_s(G)$  функция  $x(g)$  не только ограничена, но и стремится к нулю на бесконечности.
- Стр. 221, пример 10.2.1: Точнее сказать «все дифференцирования на  $\mathbb{C}[G]$  со значениями в  $\ell_p(G)$ ».

Указанные недостатки не носят принципиального характера и не оказывают влияния на общую положительную оценку работы.

Диссертация на тему «О дифференцированиях в групповых алгебрах и других алгебраических структурах» удовлетворяет всем требованиям Положения о присуждении учёных степеней по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Арутюнов Андроник Арамович, заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук.

Соискателем опубликовано 22 работы в реферируемых журналах, входящих в базу Scopus

**В заключениях членов диссертационного совета** по содержанию диссертации работа охарактеризована положительно, как выполненная на высоком научном уровне, обладающая теоретической ценностью. Замечания и вопросы, отраженные в заключениях:

1. Мелкие опечатки и грамматические ошибки в тексте диссертации и автореферате;
2. Достаточно сложная структура глав работы;
3. Не совсем понятный порядок глав в диссертации. В частности, 12 глава могла быть включена в состав 3-й главы;
4. Неправильное определение производной Фокса на стр. 18 диссертации. Основной текст работы содержит правильное определение;
5. Сомнительна целесообразность включения методических пособий в список работ по теме диссертации;

6. В главе посвященной псевдодифференциальным операторам не представлена формула композиции и формула для параметрикса;
7. Есть ли другие интересные примеры «индуктивных семейств операторов» аналогичных определениям 8.3.1 и 8.3.2?
8. Недостаточное количество иллюстративного материала, проясняющего рассуждения. В частности можно было бы представить большее число изображений диаграмм сопряженности.

Отмеченные недостатки не влияют на общую высокую оценку работы.

**Диссертационный совет отмечает**, что в результате проведенных соискателем исследования получены следующие основные результаты:

1. Построено комбинаторное описание алгебры дифференцирований. Введен идеал квазивнутренних дифференцирований и описаны квазивнешние дифференцирования. Вычислены размерности, установлены условия тривиальности и построено описание для всех введенных алгебр. В частности, показана формула для размерности фактор пространства квазивнутренних по внутренним с использованием числа концов графов.
2. Построена общая теория, описывающая различные типы дифференциальных исчисления в единых терминах характеров категорий: классических дифференцирований,  $(\sigma, \tau)$ -дифференцирований и производных Фокса.
3. Исследованы дифференцирования со значениями в свободных банаховых бимодулях. Получено решение слабой деривационной проблемы: доказано что все дифференцирования в таких бимодулях будут квазивнутренними для соответствующего семейства норм, в частности  $\ell_p$ .
4. Построено описание алгебры псевдодифференциальных операторов с использованием символьного исчисления. Построена функция порядка на таких алгебрах, доказана корректность возникающего символьного исчисления. Получено описание эллиптических операторов и главного символа.
5. Определены и изучены диаграммы сопряженности. Получены результаты по числу концов, а также другие комбинаторные свойства таких графов.
6. Проведено сравнение полученных результатов с известными, в частности относящимися к когомлогиям Хохшильда, операторной теории, теории категорий и теории графов.

**Теоретическая значимость исследования** заключается в разработке новых подходов к задаче исследования дифференцирований в ассоциативных алгебрах. Рассмотрен широкий класс возможных применений этих методов, в том числе и для прикладных исследований.

**Достоверность результатов исследования** подтверждается следующим:

- Строгая обоснованность с использованием общепринятых методов математических доказательств;
- Публикация результатов в рецензируемых международных изданиях;
- Результаты были доложены на авторитетных научных семинарах и международных математических конференциях.

**Личный вклад** соискателя состоит в получении основных результатов диссертации, а также их апробации на серии научных семинаров.

На заседании 29 декабря 2023 года диссертационный совет принял следующее решение: *Присудить Арутюнову Андронику Арамовичу степень доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.*

При проведении тайного голосования диссертационный совет в количестве 8 человек проголосовал: за – 8, против – 0, недействительных бюллетеней – 0.

Председатель диссертационного совета



В.Ж. Сакбаев

Ученый секретарь



К.Ю. Войтиков

« 29 » декабря 2023 г.